FONCTIONS DÉRIVÉES

I. Savoir calculer une dérivée :

- **Exemple :** Calculer la dérivée $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = 3x^4 + 5x - 1 \qquad g(x) = \frac{3}{x} \qquad h(x) = \frac{3}{x^2} \qquad k(x) = \frac{2x+1}{x^2}$$

- **Méthode :**
  On utilise les formules du calcul des dérivées.

$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
ax^n	nax^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

- **Solution :**

$$f(x) = 3x^4 + 5x - 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 5$$

$$g(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{x^2}$$

$$h(x) = \frac{3}{x^2} \Rightarrow h'(x) = -\frac{3(2x)}{(x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6x}{x^4}$$

$$k(x) = \frac{2x+1}{x^2} \Rightarrow k'(x) = \frac{2(x^2) - (2x+1)(2x)}{(x^2)^2} \Rightarrow k'(x) = \frac{2x^2 - 4x^2 - 2x}{x^4}$$

$$\Rightarrow k'(x) = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} \Rightarrow k'(x) = \frac{-2x(x+1)}{x^4}$$

II. Établir le tableau de variation d'une fonction avec la dérivée :

- **Exemple :** Étudier les variations de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x$
- **Solution :** $f'(x) = 2x - 2$

  D'où $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

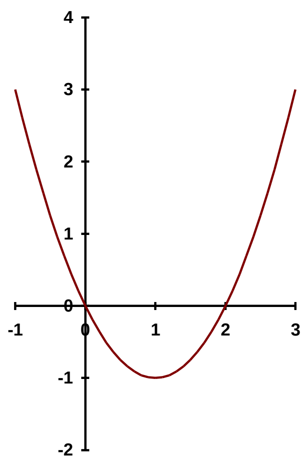
  $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$

  $x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$

  Comme on a $f(1) = -1$

  on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



III. Déterminer un maximum ou un minimum avec la dérivée :

- **Exemple :** dans une entreprise, le coût de stockage d'une marchandise en fonction de la quantité q achetée est donné par la formule $C(q) = 400q + \dfrac{90000}{q}$ pour $q \in [1;50]$.

  Quelle est la valeur de q qui rend minimale le coût de la gestion du stock ?
- **Solution :**

  On étudie les variations de la fonction $C(q) = 400q + \dfrac{90000}{q}$

$$C'(q) = 400 - \frac{90000}{q^2} = \frac{400q^2 - 90000}{q^2} = 400\frac{q^2 - 225}{q^2}$$

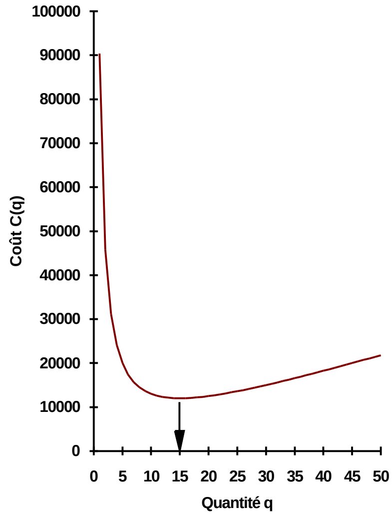
$$C'(q) = 400\frac{(q+15)(q-15)}{q^2}$$

Donc $\quad C'(q) > 0 \Leftrightarrow (q+15)(q-15) > 0$

Et $\quad q > 0 \Rightarrow C'(q) > 0 \Leftrightarrow q > 15$

On obtient le tableau de variations suivant :

q	1		15		50
$C'(q)$		$-$	0	$+$	
$C(q)$	90400	$\searrow$	12000	$\nearrow$	21800



IV. Déterminer la tangente à une courbe avec la dérivée :

- **Exemple :** soit f fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2}x - 2$, (C) sa courbe représentative et M le point de (C) d'abscisse 3.

  Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point M.
- **Solution :**

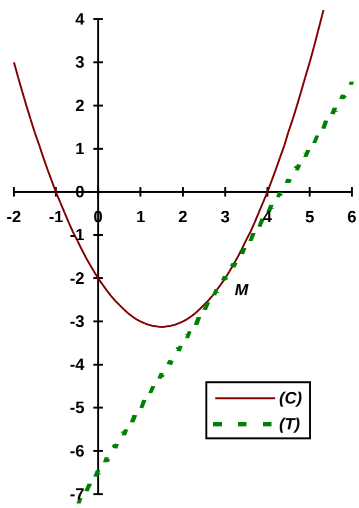
  On calcule le nombre dérivé $a = f'(3)$ de la fonction f au point M d'abscisse 3.

$$f'(x) = x - \frac{3}{2} \Rightarrow f'(3) = 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'(3) = \frac{3}{2} = a.$$

a est le coefficient directeur de la tangente à (C) au point M.

La tangente (T) a donc une équation de la forme :

$$y = \frac{3}{2}x + b$$



Elle passe par $M = (3; f(3))$, soit $M = (3; -2)$

Ainsi en M on a $x = 3$ et $y = -2$ que l'on reporte dans l'équation de la droite pour obtenir b

$$-2 = \frac{3}{2}(3) + b \Rightarrow b = -2 - \frac{9}{2} \Rightarrow b = -\frac{13}{2}$$

D'où l'équation de (T) : $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{13}{2}$