

LES ANNUITÉS

I. Calculer la valeur acquise par des annuités :

• **Exemple :** On place chaque année pendant 5 ans, en début d'année, un capital de 5 000 €. Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement, puis un an après le dernier versement (Capitalisation annuelle au taux de 6 %)

• **Méthode :** la valeur acquise au moment du dernier versement constant est donnée par la formule

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \text{avec :}$$

a : versement périodique en début de période i : taux périodique
 n : nombre de versements V_n : valeur acquise au dernier versement

• **Solution :** $a = 5\,000$; $i = 0,06$; $n = 5$;

Valeur acquise au 5^e versement : $V_5 = 5\,000 \times \frac{1,06^5 - 1}{0,06} = 28\,185,46 \text{ €}$

Valeur un an après : $28\,185,46 \times 1,06 = 29\,876,27 \text{ €}$.

Intérêts acquis alors : $29\,876,27 - (5 \times 5\,000) = 4\,876,27 \text{ €}$

• **Remarque :** il s'agit en fait d'une suite géométrique

Au début de la 5^{ème} année, le premier versement vaut : $5\,000 \times 1,06^4$

Le 2^{ème} versement ne produit des intérêts que 3 ans et vaut donc : $5\,000 \times 1,06^3$

Et ainsi de suite jusqu'au 5^{ème} versement qui n'a encore rien rapporté.

On a donc : $V_5 = 5\,000 + (5\,000 \times 1,06) + (5\,000 \times 1,06^2) + \dots + (5\,000 \times 1,06^4)$

Il s'agit d'une suite géométrique de 1er terme $u_1 = 5\,000$, de raison $q = 1,06$ avec $n = 5$.

D'où : $V_5 = u_1 \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 5\,000 \times \frac{1,06^5 - 1}{0,06} = 28\,185,46 \text{ €}$.

II. Calculer la valeur actuelle d'annuités :

• **Exemple :** On verse chaque mois en début de mois une somme de 1 000 € pendant 24 mois (taux d'actualisation : 0,5 % par mois).

Calculer la valeur actualisée de cette suite de versements un mois avant le premier versement.

• **Méthode :** la valeur actuelle une période avant le premier versement constant est donnée par la formule

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad \text{avec :}$$

a : versement périodique i : taux périodique
 n : nombre de versements V_0 : valeur actuelle une période avant le premier versement

• **Solution :** $a = 1\,000$; $i = 0,005$; $n = 24$;

Valeur actuelle cherchée : $V_0 = 1\,000 \times \frac{1 - 1,005^{-24}}{0,005} = 22\,562,87 \text{ €}$.

III. Calculer le montant d'un versement (intérêts composés) :

- **Exemple :** On emprunte 6 000 €, remboursable par 48 versements mensuels constants. Calculer la mensualité (taux mensuel : 0,9 % ; versement en fin de mois).
- **Méthode :** on obtient la mensualité à partir de la formule précédente

$$a = V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \quad \text{avec :}$$

a : versement constant en fin de période
 n : nombre de versements

i : taux périodique
 V_0 : capital emprunté

- **Solution :** $V_0 = 6000 ; i = 0,009 ; n = 48 ;$

Mensualité cherchée :
$$a = 6000 \times \frac{0,009}{1 - 1,009^{-48}} = 154,49 \text{ €}.$$

Intérêts payés :
$$(48 \times 154,49) - 6000 = 1415,52 \text{ €}$$

IV. Analyser la rentabilité d'un investissement :

- **Exemple :** Un industriel investit 450 000 € ; les capacités d'autofinancement dégagées par cet investissement sont estimées à 120 000 € pour chacune des 5 années à venir. L'investissement est-il rentable au taux de 10 % fixé par l'entreprise ?
- **Méthode :** on calcule la valeur actualisée nette (VAN) pour le taux d'actualisation i fixé par l'entreprise :

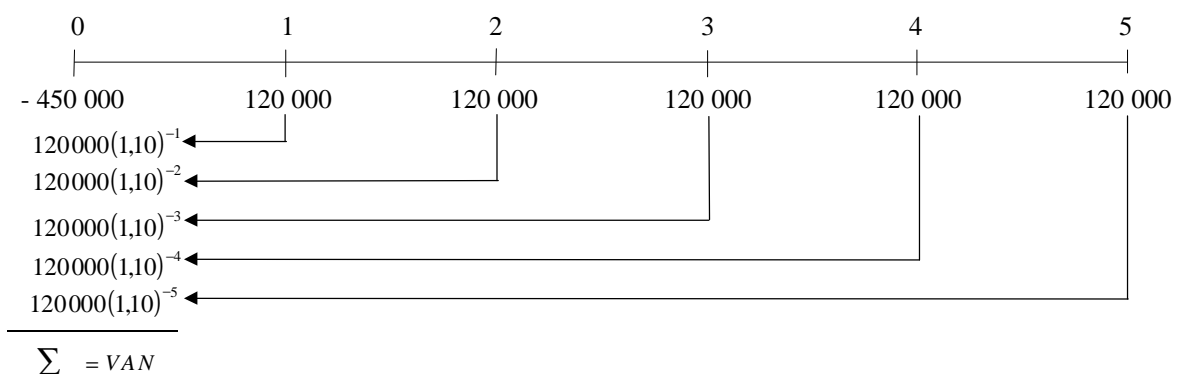
$$\text{VAN} = \text{somme des rentrées nettes actualisées} - \text{somme des capitaux actualisés}$$

$\text{VAN} > 0 \Rightarrow$ investissement rentable au taux i

$\text{VAN} < 0 \Rightarrow$ investissement non rentable au taux i

$\text{VAN} = 0 \Rightarrow i$ est alors le taux de rentabilité interne

- **Solution :**



$$\text{VAN} = 120\,000(1,10)^{-1} + \dots + 120\,000(1,10)^{-5} - 450\,000$$

$$\text{VAN} = 120\,000 \times \frac{1 - 1,10^{-5}}{0,10} - 450\,000$$

$$\text{VAN} = 120\,000 \times \frac{1 - 1,10^{-5}}{0,10} - 450\,000 = 4\,894,41 \text{ €}$$

$\text{VAN} > 0 \Rightarrow$ l'investissement est rentable au taux de 10 % fixé par l'entreprise.